$y = 5(2p-1)+1 = 10p-4$

$S_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} = \{(6p-2\ ,\ 10p-4)$ où $p \in \mathbb{Z}\}$

Solution 13 :

1°/ $U_n = n^4 + 2n^2 + 1 - n^2 = (n^2+1)^2 - n^2$

$= (n^2 - n + 1)(n^2 + n + 1)$

2°/ soit $d = (n^2+n+1) \wedge (n^2-n+1) = (n^2-n+1) \wedge 2n$

car : $(n^2+n+1 = (n^2-n+1) \times 1 + 2n)$

si $n = 2p$ $(p \in \mathbb{N})$

$\Rightarrow d = (4p^2 - 2p + 1) \wedge 4p$

$= (4p) \wedge (2p-1) = (2p-1) \wedge 2 = 1$ (ceci est d'après l'algorithme d'Euclide)

si $n = 2p+1$ $(p \in \mathbb{N})$

$\Rightarrow d = (2p+1)^2 - (2p+1) + 1 \wedge (2p+1) = (4p^2 + 2p + 1) \wedge (2p+1)$

$= (2p+1) \wedge 1 = 1$

car : $4p^2 + 2p + 1 = 2p(2p+1)+1$

conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$: n^2+n+1 et n^2-n+1 sont premiers entre eux

3°/ On a : $U_n = (n^2-n+1)(n^2+n+1)$ où $n^2+n+1 \geq 1$.

U_n est premier $\Leftrightarrow \begin{cases} n^2 - n + 1 = 1 \\ et \\ n^2 + n + 1 \quad \text{premier} \end{cases} \Leftrightarrow n = 1$

Pour $n = 1$ $\Rightarrow U_n = U_1 = 3$ qui est premier

Conclusion : U_n est premier ssi $n = 1$